# ลิเนียร์รีเกรสชั่น (Linear Regression)

เขียนโดย ดร.จักรกฤษณ์ แสงแก้ว วันที่ 21 กรกฎาคม 2562

## บทนำ

- Linear Regession คือ การนำข้อมูลที่ได้มาคำนวณหาสมการเพื่อแทนลักษณะของข้อมูลนั้น ๆ
- Simple Linear Regression คือ การนำข้อมูล 2 ชุด มาทำการหาสมการเพื่อแทนลักษณะข้อมูลของตัวแปรทั้ง 2
- Multiple Linear Regression คือ การนำข้อมูลมากกว่า 2 ชุด มาทำการหาสมการเพื่อแทนลักษณะข้อมูลของตัวแปรทั้งหมด

ตัวแปรที่เกิดจากรีเกรสชั่น
- R-Square หรือ Coefficient of determination มีค่าระหว่าง 0-1 ควรมีค่ามากกว่า 0.6
- Adjusted R-Square คือ การนำข้อมูลออก 1 ตัวแล้วคำนวณ R-Square ใหม่ ถ้าค่า R-Square และ Adjusted R-Square ต่างกันไม่มากถือว่าข้อมูลปกติดี แต่ถ้า Adjust R-Square มีค่าสูงคือข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์มีจำนวนน้อยเกินไป
- Coefficients คือ ค่าสัมประสิทธิ์ที่มีผลต่อตัวแปรนั้น ๆ
- P-value คือ ค่าความน่าจะเป็นมีค่าระหว่าง 0-1 ถ้ามีค่ามากกว่า 0.05 หมายถึงตัวแปรนั้นไม่มีความจำเป็นต้องนำมาใช้ในการสร้างสมการรีเกรสชั่น

## 1. Simple Linear Regression

- Simple Linear Regression เป็นการสร้างสมการเส้นตรงจากข้อมูลตัวเลข 2 ชุด คือ 1) ตัวแปรอิสระ $x$ 2) ตัวแปรตาม $\hat{Y}$
- รูปแบบของสมการ Simple Linear Regression เขียนได้ดังนี้

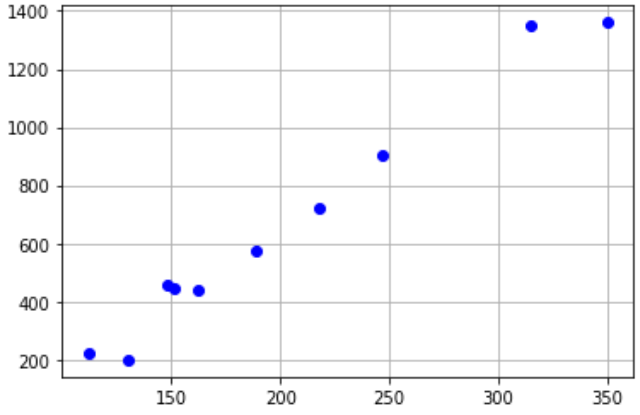
$$\hat{Y} = \alpha + \beta * x$$

$$\beta = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - n(\bar{x})^2}$$

$$\alpha = \bar{y} - \beta(\bar{x})$$

```
%pylab inline
x = np.array([112,130,148,151,162,189,218,247,315,350])
y = np.array([225,200,459,445,439,577,722,903,1350,1360])
plt.plot(x,y,'bo')
plt.grid(True)

n = x.size
xy = x*y
x_square = x**2
sp = sum(xy) - ((sum(x)*sum(y))/n)
ss = sum(x_square) - n * x.mean() **2
beta = sp/ss
alpha = y.mean() - beta * (x.mean())

print('beta = ' ,beta)
print('alpha = ', alpha)
print('สมการเส้นตรงของข้อมูลชุดนี้คือ : y = alpha + beta * (x)')
print('สมการเส้นตรงของข้อมูลชุดนี้คือ : y = %f + %f * (x)'%(alpha,beta))
```

**ผลลัพธ์ :**




```
beta =  5.171599134963733
alpha =  -377.69734508966667
สมการเส้นตรงของข้อมูลชุดนี้คือ : y = alpha + beta * (x)
สมการเส้นตรงของข้อมูลชุดนี้คือ : y = -377.697345 + 5.171599 * (x)
```

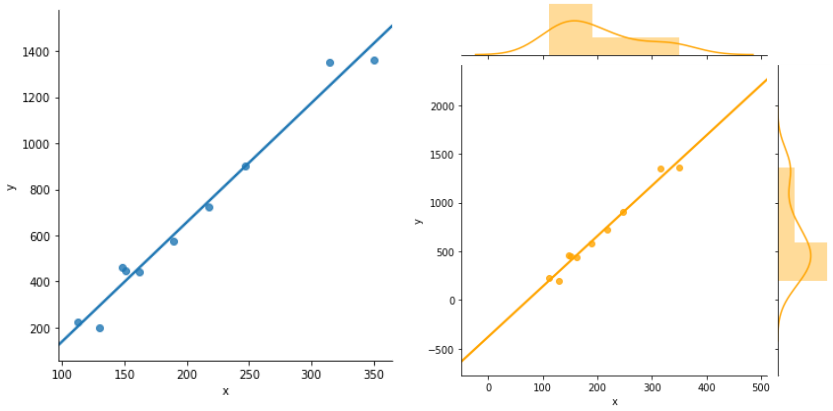
## การใช้งาน Simple Linear Regression ด้วย Scikit Learn

ในหัวข้อนี้จะใช้งานไลบรารี่ Scikit-Learn, Panda และ Seaborn ซึ่งเป็นไลบรารี่สำหรับภาษาไพธอน สำหรับงานวิเคราะห์ข้อมูลและการเรียนรู้ของเครื่องจักร โดยสามารถดาวน์โหลดใช้งานได้โดยไม่มีค่าใช้จ่าย

- Scikit-Learn สำหรับงานด้านการเรียนรู้ของเครื่องจักร (Machine Learning) เว็บไซต์ตั้งอยู่ที่ https://scikit-learn.org
- Panda สำหรับการเตรียมและจัดการข้อมูลเพื่อการประมวลผล เว็บไซต์ตั้งอยู่ที่ https://pandas.pydata.org
- Seaborn สำหรับการแสดงผลข้อมูลในรูปวิชวลทำงานบน matplotlib สามารถแสดงผลข้อมูลเกี่ยวกับสถิติต่าง ๆ ของข้อมูลได้ เว็บไซต์ตั้งอยู่ที่ https://seaborn.pydata.org/

```
import pandas as pd
import seaborn as sns
%pylab inline
x = np.array([112,130,148,151,162,189,218,247,315,350])
y = np.array([225,200,459,445,439,577,722,903,1350,1360])
data = {'x':x, 'y':y}
df = pd.DataFrame(data)
sns.lmplot(x='x',y='y',data=df,ci=None)
sns.jointplot(x='x',y='y',data=df, kind='reg', ci=None,color='orange')

from sklearn.linear_model import LinearRegression
model = LinearRegression()
print(model)
df.info()

x = df[['x']]   # เขียนโดยระบุชื่อคอลัมน์ได้อีกรูปแบบ คือ y = df.x
y = df[['y']]   # เขียนโดยระบุชื่อคอลัมน์ได้อีกรูปแบบ คือ y = df.y

model.fit(x,y)

model.score(x,y) # R-squared ของโมเดล
model.intercept_
model.coef_
```

**อธิบาย :**
บรรทัดที่ 1-2 : ขอใช้ไลบรารี่ pandas และ seaborn สำหรับจัดการดาต้าเซ็ตและการแสดงกราฟิกวิชวลไลซ์
บรรทัดที่ 3 : %pylab inline เป็นการขอใช้ matplotlib และ numpy ฯลฯ เมื่อใช้คำสั่งนี้แล้วไม่ต้อง import numpy และ mat plotlib
บรรทัดที่ 4-5 : ประกาศตัวแปร 2 ชุด คือ x และ y
บรรทัดที่ 6 : สร้างตัวแปรดิกชันนารี่ เพื่อนำไปใช้เป็นอินพุตให้กับดาต้าเฟรมต่อไป
บรรทัดที่ 7 : สร้างตัวแปร df เป็นชนิดดาต้าเฟรมโดยนำข้อมูลมาจากบรรทัดที่ 6 ดังนั้นจะมี 2 คอลัมน์คือ x และ y
บรรทัดที่ 8 : การพล็อตกราฟด้วยฟังก์ชั่น lmplot() ซึ่งเป็นลีเนียร์โมเดล ผลลัพธ์จะได้เป็นเส้นตรงแทนข้อมูล x และ y โดยกำหนด ci=None (confidence interval) คือ ไม่ต้องแสดง
บรรทัดที่ 9 : การพล็อตกราฟด้วยฟังก์ชั่น jointplot() โดยแสดงค่าความถี่ออกมาด้วย ในตัวอย่างนี้คือ ความถี่ของของตัวแปร x และ y



บรรทัดที่ 11 : ประกาศขอใช้งาน LinearRegression ภายในไลบรารี่ Scikit-Learn
บรรทัดที่ 12 : สร้างอ็อบเจ็คของคลาส LinearRegression เพื่อใช้สำหรับสร้างสมการเส้นตรงต่อไป
บรรทัดที่ 13 : พิมพ์การตั้งค่าพารามิเตอร์ของโมเดล ผลลัพธ์จะแสดงคำว่า LinearRegression(copy_X=True, fit_intercept=True, n_jobs=None, normalize=False) หมายถึง ทำการคัดลอกค่า X และกำหนดให้ใช้จุดตัดแกน Y และไม่ต้องนอมัลไลซ์ข้อมูล
บรรทัดที่ 14 : แสดงข้อมูลเกี่ยวกับดาต้าเฟรมที่ใช้งาน ในตัวอย่างนี้แสดงผลลัพธ์ เช่น ตัวแปรที่อยู่ภายใน x และ y และจำนวนข้อมูล 10 ตัว มีชนิดข้อมูลเป็นเลขจำนวนเต็ม 32 บิต เป็นต้น แสดงผลลัพธ์ได้ดังนี้
RangeIndex: 10 entries, 0 to 9
Data columns (total 2 columns):
x  10 non-null int32
y  10 non-null int32
dtypes: int32(2)
memory usage: 160.0 bytes

บรรทัดที่ 16-17 : กำหนดตัวแปร x และ y โดยจะทับข้อมูลเดิมที่ประกาศในบรรทัดที่ 4-5 เพื่อจะนำไปใช้ในการสร้างลิเนียร์รีเกรสชั่นโมเดลต่อไป บรรทัดนี้ผู้อ่านสามารถกำหนดเป็นตัวแปรอื่นได้เพื่อป้องกันการสับสน
บรรทัดที่ 19 : สร้างโมเดลลิเนียร์รีเกรสชั่นด้วยฟังก์ชั่น fit() โดยป้อนข้อมูลตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม ตามลำดับ
บรรทัดที่ 21 : เป็นการพิมพ์ค่า R-square ของโมเดล ซึ่งในตัวอย่างนี้มีค่า 0.98
บรรทัดที่ 22 : แสดงค่าจุดตัดแกน y หรือค่า $\alpha$ ของสมการลิเนียร์รีเกรสชั่น ซึ่งมีค่า -377.69
บรรทัดที่ 23 : แสดงค่าสัมประสิทธิ์ Coefficient หรือค่า $\beta$ ของสมการลิเนียร์รีเกรสชั่น มีค่า 5.17

## 2. Multiple Linear Regression

- Multiple Linear Regressoin คือ การสร้างสมการเส้นตรงเพื่อแทนลักษณะข้อมูลของกลุ่มตัวแปร มากกว่า 2 ตัวขึ้นไป
- สมการของ Multiple Linear Regression คือ $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$
- สำหรับการคำนวณหาค่า $\beta_1, \beta_2 .. \beta_n$ ดำเนินการในลักษณะเดียวกับ Simple Linear Regression

## การใช้งาน Multiple Linear Regression ด้วย Python และ Scikit Learn

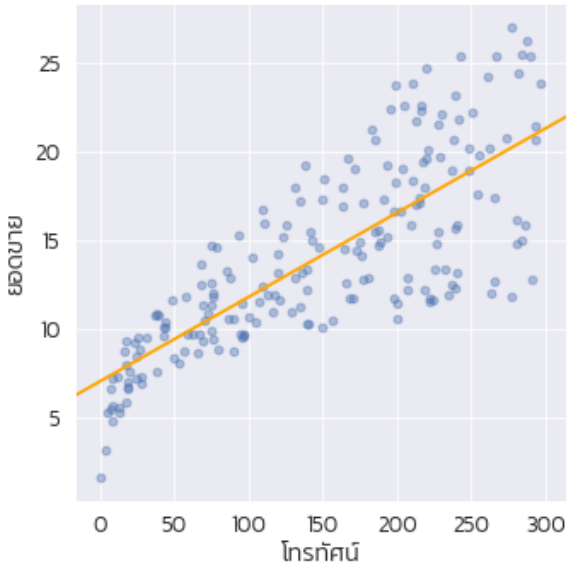
ในหัวข้อนี้เป็นการใช้งานลีเนียร์รีเกรสชั่นหลายตัวแปร (Multiple Linear Regression) โดยใช้ดาต้าเซ็ตการโฆษณาและยอดขาย ประกอบด้วยการโฆษณา จาก 3 แหล่ง ได้แก่ โทรทัศน์ วิทยุ หนังสือพิมพ์
1. ตัวแปรตาม (dependent variable) คือ ยอดขาย
2. ตัวแปรอิสระหรือตัวแปรต้น (independent variable) คือ ก) โฆษณากับโทรทัศน์ ข) โฆษณากับวิทยุ ค) โฆษณากับหนังสือพิมพ์

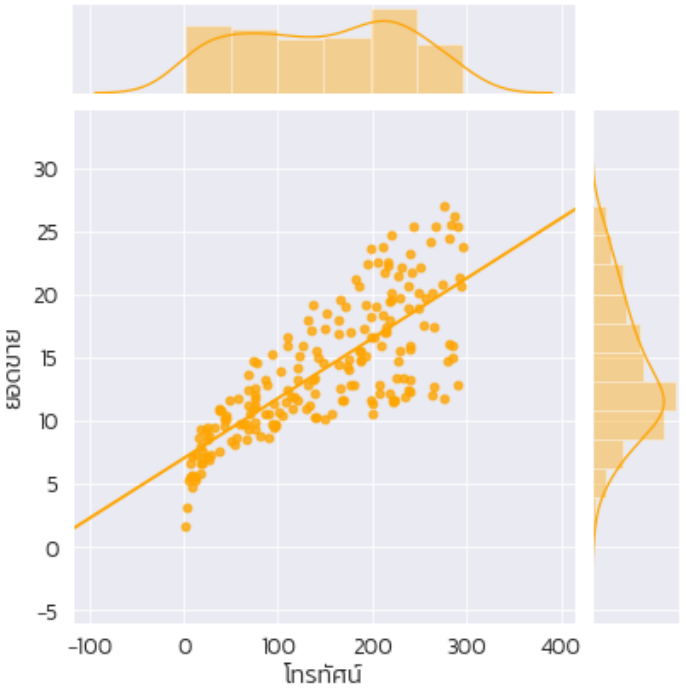
วัตถุประสงค์ของการทำ Multiple Linear Regression คือ การสร้างสมการเส้นตรงจากข้อมูลที่เก็บรวบรวมมา โดยมีตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัวขึ้นไป
เขียนโปรแกรมด้วยภาษาไพธอนและ Scikit-Learn ได้ดังนี้

```
import pandas as pd
import seaborn as sns
%pylab inline

df = pd.read_csv("https://raw.githubusercontent.com/dsdi/dataset/master/th-advertising.csv", usecols=[1,2,3,4])
sns.set(font="Kanit-Light",font_scale=2)
sns.set_context("paper", font_scale=1.5)
sns.lmplot(x='โทรทัศน์',y='ยอดขาย', data=df, ci=None, scatter_kws={'alpha':0.4}, line_kws={'color':'orange'})
sns.jointplot(x='โทรทัศน์',y='ยอดขาย', data=df, kind='reg', ci=None,color='orange')

from sklearn.linear_model import LinearRegression
x = df.drop(columns=['ยอดขาย'])[:160]
y = df['ยอดขาย'][:160]
x.head()
model = LinearRegression()
model.fit(x,y)
model.score(x,y)  #R-Squared
model.intercept_
model.coef_ # สัมประสิทธิ์ ของ ทีวี วิทยุ หนังสือพิมพ์
model.predict([[250,40,70]])  # โฆษณาด้วย ทีวี 250, วิทยุ 40 และหนังสือพิมพ์ 70 จะมียอดขาย 22
model.predict([[250,40,70],
               [50,40,45],
               [20,50,70]])
x_test = df.drop(columns=['ยอดขาย'])[160:]
x_test.head()
y_predict = model.predict(x_test)
print(y_predict)

dc = pd.concat([df[160:].reset_index(), pd.Series(y_predict,name='พยากรณ์')],axis='columns')
dc
```

**คำอธิบาย :**

บรรทัดที่ 1-2 : ขอใช้ไลบรารี่ pandas และ seaborn
บรรทัดที่ 3 : ขอใช้งาน matplotlib และ numpy ผ่านคำสั่ง %pylab inline
บรรทัดที่ 5 : อ่านดาต้าเซ็ตเข้ามาซึ่งเก็บไว้ใน github ในขั้นตอนนี้ต้องเชื่อมต่ออินเตอร์เน็ตเพื่อโหลดข้อมูล
บรรทัดที่ 6 : กำหนดฟอนต์ kanit-light เพื่อแสดงผลภาษาไทยบนกราฟซึ่งต้องติดตั้งลงในคอมพิวเตอร์ก่อนการใช้งาน หากสามารถใช้ฟอนต์ Tahoma แทนได้
บรรทัดที่ 7 : กำหนดขนาดฟอนต์ใหญ่ขึ้น 1.5 เท่า
บรรทัดที่ 8 : พล็อตเส้นตรงด้วยฟังก์ชั่น lmplot() ซึ่งเป็น linear model โดยกำหนดค่า "โทรทัศน์" เป็นตัวแปรต้น และ "ยอดขาย" เป็นตัวแปรตาม ใช้ข้อมูลจากตัวแปร df และไม่ต้องแสดง ci (confidence interval) กำหนดให้พล็อตแบบ scatter มีค่าโปร่งแสง 40 เปอร์เซ็นต์ และระบายสีเส้นด้วยสีส้ม
บรรทัดที่ 9 : พล็อตข้อมูลโดยแสดงความถี่ของข้อมูลด้านบนและด้านข้างของกราฟเพื่อแสดงความหนาแน่นของข้อมูล โดยใช้ฟังก์ชั่น jointplot() และใช้ตัวแปรต้น คือ โทรทัศน์ ส่วนตัวแปรตาม คือ ยอดขาย  กำหนดพารามิเตอร์ kind เป็นชนิด "reg" (regression) ไม่ต้องแสดง confidence interval และระบายสีส้มลงบนเส้นลีเนียร์รีเกรสชั่น




บรรทัดที่ 11 : ขอใช้งานคลาส LinearRegression จากไลบรารี่ Scikit-Learn
บรรทัดที่ 12 : สร้างตัวแปรต้นเก็บไว้ใน x ให้มีข้อมูลเพียง 3 คอลัมน์ โดยลบคอลัมน์ "ยอดขาย" ออกไป และดึงข้อมูลมาเพียง 160 เรคคอร์ด
บรรทัดที่ 13 : สร้างตัวแปรตามเก็บไว้ใน y ให้มีข้อมูลเพียง 1 คอลัมน์ คือ "ยอดขาย" และดึงข้อมูลมาก 160 เรคคอร์ด
บรรทัดที่ 14 : แสดงข้อมูล header ของตัวแปรต้น ออกมา ซึ่งจะประกอบด้วย โทรทัศน์ วิทยุ หนังสือพิมพ์ ดังนี้

| | โทรทัศน์ | วิทยุ | หนังสือพิมพ์ |
|---|---|---|---|
| **0** | 230.1 | 37.8 | 69.2 |
| **1** | 44.5 | 39.3 | 45.1 |
| **2** | 17.2 | 45.9 | 69.3 |
| **3** | 151.5 | 41.3 | 58.5 |
| **4** | 180.8 | 10.8 | 58.4 |

บรรทัดที่ 15 : สร้างอินสแตนท์ของคลาส LinearRegression() ชื่อ model เพื่อใช้สำหรับการสร้างโมเดลโดยสามารถตั้งชื่ออื่นตามที่ต้องการ ได้ เช่น my_linear_regression_model เป็นต้น
บรรทัดที่ 16 : คำสั่ง fit() เป็นการสร้างรีเกรสชั่นโมเดลโดยระบุตัวแปรต้นและตัวแปรอิสระลงไป ในตัวอย่างนี้ x เป็นตัวแปรต้น ส่วน y เป็นตัวแปรอิสระ
บรรทัดที่ 17-19 : แสดงค่า R-Square ด้วยคำสั่ง score(x,y) ตามด้วยแสดงค่า $\beta_0$ หรือค่าจุดตัดแกน y (intercept_) และสุดท้ายแสดงค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรซึ่งเก็บไว้ใน model.coef_ มีจำนวนเท่ากับตัวแปรอิสระ ได้แก่ สัมประสิทธิ์การโฆษณาด้วยโทรทัศน์ วิทยุ และหนังสือพิมพ์ตามลำดับ
บรรทัดที่ 20 : คำนวณค่า ยอดขาย จากโมเดลที่สร้างขึ้นด้วยการป้อนข้อมูลใหม่เข้าไปเพื่อพยากรณ์ว่ายอดขายจะเท่ากับเท่าไร โดยระบุโทรทัศน์ (250), วิทยุ (40) และหนังสือพิมพ์ (70) พบว่าโมเดลที่ได้ทำนายผลลัพธ์ยอดขายมีค่า 21.89
บรรทัดที่ 21-23 : เป็นการคำนวณ ยอดขาย เหมือนบรรทัด 20 แต่ส่งข้อมูลไปพร้อมกัน 3 แถว ผลลัพธ์ แสดงดังนี้ array([21.89282947, 12.46601233, 12.82406754])
บรรทัดที่ 24 : สร้างตัวแปร x_test สำหรับนำส่วนที่เหลือจากแถวที่ 161 - 200 มาคำนวณ ยอดขาย โดยส่งเข้าไปให้ฟังก์ชั่น predict()
บรรทัดที่ 25 : แสดงข้อมูลของตัวแปร x_test ออกมาด้วยคำสั่ง x_test.head(8) เมื่อเลข 8 คือจำนวนเรคคอร์ดที่ต้องการแสดงผลลัพธ์ออกมาเพียงบางส่วน ดังนี้

| | โทรทัศน์ | วิทยุ | หนังสือพิมพ์ |
|---|---|---|---|
| **160** | 172.5 | 18.1 | 30.7 |
| **161** | 85.7 | 35.8 | 49.3 |
| **162** | 188.4 | 18.1 | 25.6 |
| **163** | 163.5 | 36.8 | 7.4 |
| **164** | 117.2 | 14.7 | 5.4 |
| **165** | 234.5 | 3.4 | 84.8 |
| **166** | 17.9 | 37.6 | 21.6 |
| **167** | 206.8 | 5.2 | 19.4 |

บรรทัดที่ 27 : แสดงผลลัพธ์การคำนวณ ยอดขาย จากแถวที่ 161 ถึง 200 ออกมา
บรรทัดที่ 29 : สร้างตัวแปรใหม่ ชื่อ dc โดยเพิ่มผลลัพธ์ที่คำนวณได้ในบรรทัดที่ 27 ขึ้นมาเป็นอีก 1 คอมลัมน์ ชื่อ "พยากรณ์"
บรรทัดที่ 30 : แสดงผลตัวแปร dc หลังจากเพิ่มคอลัมน์ "พยากรณ์" เข้าไป แสดงผลลัพธ์ได้ ดังนี้

| | index | โทรทัศน์ | วิทยุ | หนังสือพิมพ์ | ยอดขาย | พยากรณ์ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 160 | 172.5 | 18.1 | 30.7 | 14.4 | 14.327603 |
| **1** | 161 | 85.7 | 35.8 | 49.3 | 13.3 | 13.393180 |
| **2** | 162 | 188.4 | 18.1 | 25.6 | 14.9 | 15.083726 |
| **3** | 163 | 163.5 | 36.8 | 7.4 | 18.0 | 17.288872 |
| **4** | 164 | 117.2 | 14.7 | 5.4 | 11.9 | 11.126712 |
| **5** | 165 | 234.5 | 3.4 | 84.8 | 11.9 | 14.561304 |
| **6** | 166 | 17.9 | 37.6 | 21.6 | 8.0 | 10.539499 |
| **7** | 167 | 206.8 | 5.2 | 19.4 | 12.2 | 13.638024 |
| **8** | 168 | 215.4 | 23.6 | 57.6 | 17.1 | 17.318893 |
| **9** | 169 | 284.3 | 10.6 | 6.4 | 15.0 | 18.283913 |
| **10** | 170 | 50.0 | 11.6 | 18.4 | 8.4 | 7.381340 |

## การใช้งาน Multiple Linear Regression ด้วย Python และ Statsmodels

ในหัวข้อนี้เป็นการใช้งาน Multi Linear Regression ด้วยภาษาไพธอนและใช้ไลบรารี่อีกตัวหนึ่งที่ชื่อว่า statsmodel ให้ผลการวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติละเอียดกว่า scikit-learn พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

```
import statsmodels.api as sm
import statsmodels.formula.api as smf
df = pd.read_csv("https://raw.githubusercontent.com/dsdi/dataset/master/en-advertising.csv", usecols=[1,2,3,4])
model = smf.ols(formula="Sales ~ TV + Radio + Newspaper", data=df[:160]).fit()
print(model.summary())
```

**ผลลัพธ์ :**

OLS Regression Results

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dep. Variable: | Sales | R-squared: | 0.896 |
| Model: | OLS | Adj. R-squared: | 0.894 |
| Method: | Least Squares | F-statistic: | 448.7 |
| Date: | Mon, 22 Jul 2019 | Prob (F-statistic): | 1.80e-76 |
| Time: | 12:47:30 | Log-Likelihood: | -310.02 |
| No. Observations: | 160 | AIC: | 628.0 |
| Df Residuals: | 156 | BIC: | 640.3 |
| Df Model: | 3 | | |
| Covariance Type: | nonrobust | | |

| | coef | std err | t | P>\|t\| | [0.025 | 0.975] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 2.9490 | 0.358 | 8.236 | 0.000 | 2.242 | 3.656 |
| TV | 0.0473 | 0.002 | 29.965 | 0.000 | 0.044 | 0.050 |
| Radio | 0.1799 | 0.010 | 18.149 | 0.000 | 0.160 | 0.200 |
| Newspaper | -0.0009 | 0.007 | -0.143 | 0.886 | -0.014 | 0.012 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Omnibus: | 52.610 | Durbin-Watson: | 2.120 |
| Prob(Omnibus): | 0.000 | Jarque-Bera (JB): | 128.997 |
| Skew: | -1.388 | Prob(JB): | 9.74e-29 |
| Kurtosis: | 6.412 | Cond. No. | 453. |

Warnings:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.

**อธิบาย :**
บรรทัดที่ 1-2 : ขอใช้ไลบรารี่ statsmodels
บรรทัดที่ 3 : สร้างตัวแปรดาต้าเฟรมตั้งชื่อ df โดยโหลดข้อมูลดาต้าเซ็ตจากไฟล์ en-advertising.csv ใช้คอลัมน์ 1,2,3 และ 4 ตามลำดับ
บรรทัดที่ 4 : สร้างโมเดลจากสูตร "Sales ~ TV + Radio + Newspaper" โดยใช้ข้อมูล 160 เรคอร์ดด้านบนจากทั้งหมด 200 เรคคอร์ด
บรรทัดที่ 5 : แสดงรายละเอียดข้อมูลชุดนี้ ประกอบด้วยค่าสถิติหลายตัว ได้แก่ R-Squared และ Adjusted R-Squared ฯลฯ
- ค่า p-value ช่วยให้มองเห็นว่า ตัวแปร newspaper มีค่า 0.886 ซึ่งไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ หมายถึงตัวแปรดังกล่าวไม่จำเป็นต้องนำมาใช้ในการสร้างสมการจะยังคงให้ความถูกต้องไม่แตกต่างกัน

## ศึกษาเพิ่มเติม

- https://sites.google.com/site/mystatistics01/home
- https://www.youtube.com/user/RStatsInstitute/videos